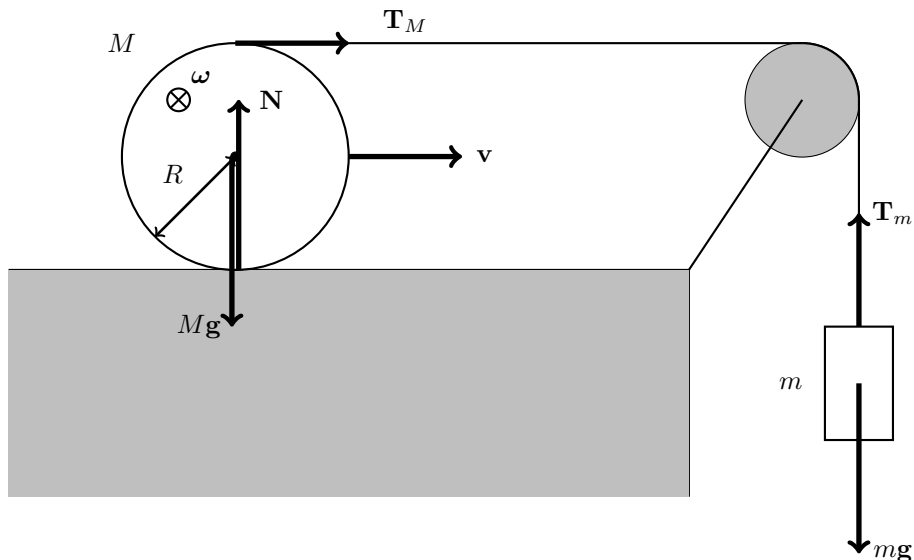


Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore
OLIMPIJADA ZNANJA 2026

Rešenja zadataka iz fizike za IV razred srednje škole

1. Homogena kugla mase M i poluprečnika R nalazi se na horizontalnoj podlozi. Oko nje je namotan neistegljiv konac, čiji je kraj prebačen preko kotura, i za njega je obješen teg mase m , kao na slici. Ako u početnom trenutku sistem miruje, naći ukupnu energiju kugle u trenutku kada ona napravi rotaciju za jedan pun krug. Zanemariti sile trenja, mase konca i kotura, i klizanje konca po kugli.

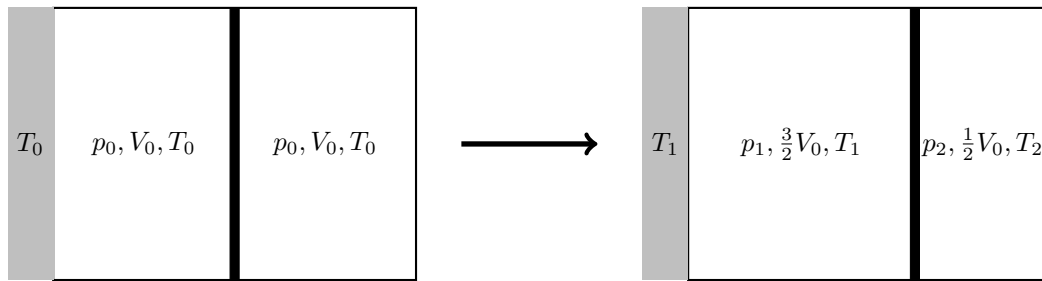


Na kuglu u horizontalnom pravcu djeluje samo sila zatezanja konca \mathbf{T}_M , čiji je intenzitet $|\mathbf{T}_M| = |\mathbf{T}_m| = T$. Ta sila dovodi do translacionog kretanja centra mase kugle, a njen moment do rotacije. Sile $M\mathbf{g}$ i \mathbf{N} su uravnotežene po y -osi i ne utiču na translaciju ni na rotaciju kugle. Neka su a_1 i a_2 intenziteti ubrzanja centra mase kugle i tega, i α intenzitet ugaonog ubrzanja kugle. Jednačine translacionih kretanja tega i kugle su $ma_2 = mg - T$ i $Ma_1 = T$. Jednačina rotacionog kretanja kugle je $I\alpha = TR$, gdje je $I = \frac{2}{5}MR^2$ njen moment inercije oko ose rotacije. Iz ovih

jednakosti se dobija $a_1 = \frac{2}{5}R\alpha$ i $a_2 = g - \frac{2M}{5m}R\alpha$. Pošto konac ne kliza po kugli, njegovo ubrzanje, čiji je intenzitet isti kao za teg, a_2 , mora biti jednako ubrzanju tačke na vrhu kugle, odnosno $a_2 = a_1 + R\alpha$. Zamjenom izraza za ubrzanja i rešavanjem ove jednačine, dobija se $\alpha = \frac{5mg}{R(2M+7m)}$, pa je onda i $a_1 = \frac{2mg}{2M+7m}$. Nakon proteklog vremena t , brzina centra mase kugle je $v = a_1 t = \frac{2mgt}{2M+7m}$, a ugaona brzina njene rotacije je $\omega = \alpha t = \frac{5mgt}{R(2M+7m)}$. Kinetička energija translacionog kretanja kugle u tom trenutku iznosi $E_T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{2Mm^2g^2t^2}{(2M+7m)^2}$, a rotacionog $E_R = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{5Mm^2g^2t^2}{(2M+7m)^2}$. Ukupna energija kugle, u funkciji od vremena, je $E(t) = E_T + E_R = \frac{7Mm^2g^2t^2}{(2M+7m)^2}$. Neka je τ vrijeme za koje se kugla zarotira za cio krug. Opisani ugao kugle za to vrijeme je 2π , pa važi da je $2\pi = \frac{1}{2}\alpha\tau^2$, odakle je $\tau^2 = \frac{4\pi R(2M+7m)}{5mg}$. Zamjenom u izraz za energiju, dobija se da energija kugle u trenutku τ iznosi $E(\tau) = \frac{28\pi MmgR}{5(2M+7m)}$.

2. U horizontalnom cilindru nalaze se dvije jednake količine istog jednoatomskog gasa, razdvojene lakim, pokretnim, toplotno izolovanim klipom. Jedan kraj cilindra je u termičkom kontaktu sa spoljnim grijačem, a ostali zidovi suda su toplotno izolovani. U početku su na obje strane klipa isti pritisak p_0 , zapremina V_0 , i temperatura T_0 . Dio gasa koji je u kontaktu sa grijačem polako se zagrijava, sve dok njegova zapremina postane $\frac{3}{2}V_0$.

- Odrediti pritisak i temperaturu oba dijela gasa nakon zagrijavanja.
- Koliku količinu toplote primi gas u kontaktu sa grijačem?
- Skicirati $p - V$ dijagram ovog procesa.

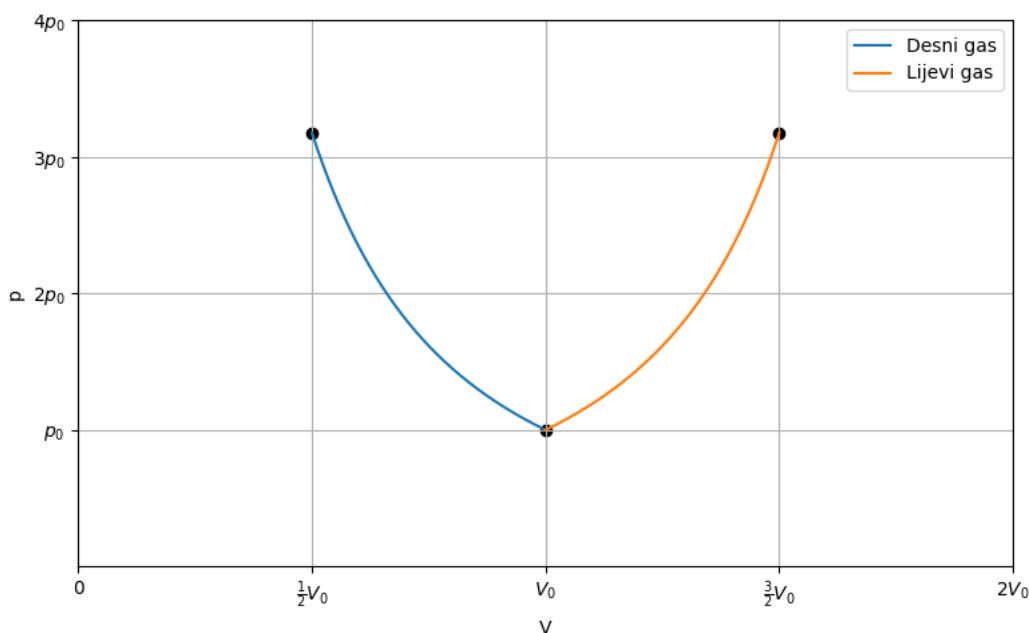


- Ukupna zapremina gasa je konstantna i iznosi $2V_0$, pa u trenutku kada je $V_1 = \frac{3}{2}V_0$ mora biti $V_2 = \frac{1}{2}V_0$. Pošto su i klip i zidovi suda toplotno izolovani, gas u desnom dijelu suda na slici sabija se adijabatski, samo kompresijom pod uticajem gasa sa lijeve strane klipa. Za adijabatski proces važi $pV^\gamma = \text{const}$, gdje je za jednoatomski gas $\gamma = \frac{5}{3}$. Onda je za desni gas $p_2 \left(\frac{V_0}{2}\right)^{5/3} = p_0 V_0^{5/3}$, odnosno $p_2 = p_0 2^{5/3}$. Klip je

u ravnoteži, pa su pritisci sa njegove dvije strane jednaki, to jest $p_1 = p_2 = p_0 2^{5/3}$. Za desni gas važi i $TV^{\gamma-1} = \text{const}$, odnosno $T_2 \left(\frac{V_0}{2}\right)^{2/3} = T_0 V_0^{2/3}$, pa je $T_2 = T_0 2^{2/3}$. Za lijevi gas, na osnovu jednačine stanja idealnog gasa, važi $\frac{p \cdot \frac{3}{2} V_0}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$, odakle se dobija $T_1 = 3T_0 2^{2/3}$.

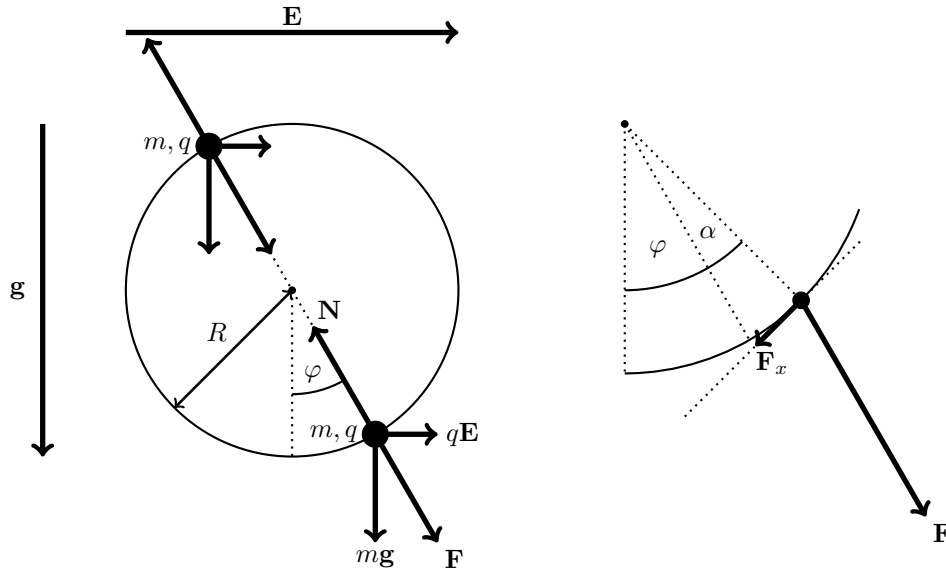
b) Na osnovu prvog zakona termodinamike, količina toplote koju lijevi gas primi je $Q_1 = \Delta U_1 + A_1$. Promjena energije ovog dijela gasa je $\Delta U_1 = \frac{3}{2} nR (T_1 - T_0) = \frac{3}{2} p_0 V_0 (3 \cdot 2^{2/3} - 1)$. Rad koji lijevi gas izvrši je isti kao rad izvršen nad desnim gasom, $A_1 = -A_2$, a pošto se drugi gas adijabatski sabija, za njega je $A_2 = -\Delta U_2$. Dakle, $A_1 = \Delta U_2 = \frac{3}{2} nR (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} p_0 V_0 (2^{2/3} - 1)$. Sabiranjem ova dva izraza se dobija $Q_1 = 3p_0 V_0 (2^{5/3} - 1)$.

c) U početnom trenutku oba dijela gasa su u istom stanju (V_0, p_0) . Desni dio gasa doživljava adijabatsku kompresiju, do stanja $(\frac{1}{2}V_0, p_0 2^{5/3})$. Lijevi gas se širi do stanja $(\frac{3}{2}V_0, p_0 2^{5/3})$, ali ne putem nekog od elementarnih termodinamičkih procesa. Ako je zapremina desnog gasa u nekom trenutku $V_0 - \Delta V$, zapremina lijevog gasa je, zbog konstantnosti ukupne zapremine, $V_0 + \Delta V$. Iz ovog uslova, i jednakosti pritisaka gasova zbog ravnoteže klipa, može se zaključiti da, kada je desni dio gasa u stanju $(p, V_0 - \Delta V)$, lijevi mora biti u stanju $(p, V_0 + \Delta V)$. Ovo znači da su njihove krive simetrične u odnosu na pravu $V = V_0$. Odgovarajući $p - V$ dijagram je prikazan na slici ispod.



3. Kuglica mase m i naelektrisanja q može da klizi bez trenja duž vertikalne neprovodne kružnice poluprečnika R . Kružnica se nalazi u homogenom električnom polju jačine E , usmjerenom horizontalno, kao na slici. Odrediti:

- ravnotežne položaje kuglice;
- stabilnosti ravnotežnih položaja;
- period malih oscilacija kuglice oko stabilnog ravnotežnog položaja.



a) Položaj kuglice na kružnici opisuje se uglom u odnosu na najnižu tačku kružnice, kao na lijevoj slici. Kuglica je u ravnoteži kada rezultantna sila $\mathbf{F} = m\mathbf{g} + q\mathbf{E}$ ima pravac normale na kružnicu. Intenzitet sile \mathbf{F} je $F = \sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}$, i ova sila ima isti smjer, nezavisno od položaja kuglice. Zbog toga postoje dva ravnotežna položaja, jedan opisan uglom φ , kada je \mathbf{F} usmjerena suprotno od centra kružnice, i drugi opisan uglom $\varphi + \pi$, kada je \mathbf{F} usmjerena ka centru. Zbog silčnosti trouglova, ugao φ se može dobiti iz uslova $\tan \varphi = \frac{qE}{mg}$. Odavde je $\varphi = \arctg \frac{qE}{mg}$.

b) Za određivanje stabilnosti, potrebno je provjeriti šta se dešava kada se kuglica malo pomjeri iz ravnotežnog položaja. Za donji ravnotežni položaj, kao što se vidi na desnoj slici, kada se kuglica malo pomjeri duž kružnice, sila \mathbf{F} ima tangencijalnu komponentu, koja je usmjerena prema ravnotežnom položaju. To znači da će, u slučaju da je trenje zanemarljivo, kuglica oscilovati oko tog položaja, pa je tu ravnoteža stabilna. Nasuprot tome, nakon svakog malog pomjeranja iz gornjeg ravnotežnog položaja, sila \mathbf{F} će nastaviti dodatno da udaljava tijelo, jer bi imala tangencijalnu komponentu na suprotnu stranu, pa je tu ravnoteža nestabilna.

c) Neka je kuglica izvedena za mali ugao α iz položaja stabilne ravnoteže, kao na desnoj slici. Tangencijalna komponenta \mathbf{F}_x dovodi do oscilovanja kuglice. Njen intenzitet je jednak $F_x = F \sin \alpha$. Pošto je ugao α mali, onda važi $\sin \alpha \approx \alpha = \frac{l}{R}$, gdje je l dužina kružnog luka između položaja kuglice i ravnotežnog položaja, koja je približno jednaka rastojanju x od ravnotežnog položaja. Dakle, $\sin \alpha \approx \frac{x}{R}$, pa se zamjenom u izraz za komponentu sile dobija $F_x = \frac{F}{R} x$. Vidi se da je sila proporcionalna elongaciji, što odgovara oscilatornom kretanju, sa koeficijentom proporcionalnosti $k = \frac{F}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}$. Period ovih malih oscilacija je $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{mR}{\sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}}}$.

4. Raketa se udaljava od Zemlje brzinom $0.8c$. Iz rakete se prema Zemlji emituju dva svjetlosna signala. Vremenski interval između ta dva emitovanja, u sistemu vezanom za raketu, iznosi 5 s. Koliki je vremenski interval između prijema ova dva signala na Zemlji, u sistemu vezanom za Zemlju?

Neka je sistem S vezan za Zemlju, a sistem S' za raketu, i neka se raketa kreće duž x -ose. Označimo sa 1 i 2 događaje emitovanja prvog i drugog svjetlosnog signala. Koordinate događaja 1 u sistemu S su (x_1, t_1) , a u sistemu S' (x'_1, t'_1) . Slično, koordinate događaja 2 u sistemu S su (x_2, t_2) , a u sistemu S' (x'_2, t'_2) , pri čemu je $t'_2 - t'_1 = \Delta t' = 5$ s. Na osnovu Lorencovih transformacija je za prvi događaj $x_1 = \gamma(x'_1 + vt'_1)$, $t_1 = \gamma(t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_1)$, a za drugi $x_2 = \gamma(x'_2 + vt'_2)$, $t_2 = \gamma(t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_2)$, gdje je $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ Lorencov faktor. Prvi signal stiže na Zemlju u trenutku $T_1 = t_1 + \frac{x_1}{c}$, a drugi u trenutku $T_2 = t_2 + \frac{x_2}{c}$, jer svjetlost od trenutaka emitovanja treba do Zemlje da pređe rastojanja x_1 , odnosno x_2 . Vremenski interval između ova dva trenutka je $\Delta T = T_2 - T_1 = t_2 - t_1 + \frac{x_2 - x_1}{c}$. Zamjenom izraza iz Lorencovih transformacija, dobija se $\Delta T = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \Delta t' = 15$ s.